

# Преподавание курса «Вероятность и статистика» в старшей школе в условиях обновления содержания образования

Гиматдинова Галия Нурулловна  
канд. пед. наук,  
старший преподаватель кафедры математики и МОМ,  
КГПУ им. В.П. Астафьева  
[gimatdinova\\_gn@kspu.ru](mailto:gimatdinova_gn@kspu.ru)



ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ  
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

федеральное государственное  
бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

# МАТЕМАТИКА

**(базовый уровень)**

(для 10–11 классов образовательных организаций)



ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ  
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

федеральное государственное  
бюджетное научное учреждение

ФЕДЕРАЛЬНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА  
СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

# МАТЕМАТИКА

**(углублённый уровень)**

(для 10–11 классов образовательных организаций)

## ФРП «Математика» (базовый уровень)

## ФРП «Математика» (углубленный уровень)

### Содержание обучения в 10 классе

– Представление данных с помощью таблиц и диаграмм. Среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия и стандартное отклонение числовых наборов.

– Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий. Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями. Вероятности событий в опытах с равновероятными элементарными событиями.

– Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Диаграммы Эйлера. Формула сложения вероятностей.

– Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Независимые события.

– Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона.

– Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли.

– Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Примеры распределений, в том числе, геометрическое и биномиальное.

– Граф, связный граф, пути в графе: циклы и цепи. Степень (валентность) вершины. Графы на плоскости. Деревья.

– Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий. Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями.

– Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Диаграммы Эйлера. Формула сложения вероятностей.

– Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события.

– Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона.

– Серия независимых испытаний Бернулли. Случайный выбор из конечной совокупности.

– Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Операции над случайными величинами. Бинарная случайная величина. Примеры распределений, в том числе геометрическое и биномиальное.

## ФРП «Математика» (базовый уровень)

## ФРП «Математика» (углубленный уровень)

### Содержание обучения в 11 классе

- Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение. Примеры применения математического ожидания, в том числе в задачах из повседневной жизни. Математическое ожидание бинарной случайной величины. Математическое ожидание суммы случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия геометрического и биномиального распределений.
- Закон больших чисел и его роль в науке, природе и обществе. Выборочный метод исследований.
- Примеры непрерывных случайных величин. Понятие о плотности распределения. Задачи, приводящие к нормальному распределению. Понятие о нормальном распределении.

- Совместное распределение двух случайных величин. Независимые случайные величины.
- Математическое ожидание случайной величины (распределения). Примеры применения математического ожидания (страхование, лотерея). Математическое ожидание бинарной случайной величины. Математическое ожидание суммы случайных величин. Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений.
- Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины (распределения). Дисперсия бинарной случайной величины. Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин. Дисперсия и стандартное отклонение биномиального распределения. Дисперсия и стандартное отклонение геометрического распределения.
- Неравенство Чебышёва. Теорема Чебышёва. Теорема Бернулли. Закон больших чисел. Выборочный метод исследований. Выборочные характеристики. Оценивание вероятности события по выборочным данным. Проверка простейших гипотез с помощью изученных распределений.
- Непрерывные случайные величины. Примеры. Функция плотности вероятности распределения. Равномерное распределение и его свойства. Задачи, приводящие к показательному распределению. Задачи, приводящие к нормальному распределению. Функция плотности вероятности показательного распределения, функция плотности вероятности нормального распределения. Функция плотности и свойства нормального распределения.
- Последовательность одиночных независимых событий. Задачи, приводящие к распределению Пуассона.
- Ковариация двух случайных величин. Коэффициент линейной корреляции. Совместные наблюдения двух величин. Выборочный коэффициент корреляции. Различие между линейной связью и причинно-следственной связью. Линейная регрессия, метод наименьших квадратов.





## ВОПРОС

Федеральная рабочая программа | Математика. 10-11 классы (углублённый уровень)

### 11 КЛАСС

Совместное распределение двух случайных величин. Независимые случайные величины.

Математическое ожидание случайной величины (распределения). Примеры применения математического ожидания (страхование, лотерея). Математическое ожидание бинарной случайной величины. Математическое ожидание суммы случайных величин. Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений.

Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины (распределения). Дисперсия бинарной случайной величины. Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин. Дисперсия и стандартное отклонение биномиального распределения. Дисперсия и стандартное отклонение геометрического распределения.

К концу 11 класса обучающийся научится:

оперировать понятием: совместное распределение двух случайных величин, использовать таблицу совместного распределения двух случайных величин для выделения распределения каждой величины, определения независимости случайных величин;

свободно оперировать понятием математического ожидания случайной величины (распределения), применять свойства математического ожидания при решении задач, вычислять математическое ожидание биномиального и геометрического распределений.

В ФРП СОО «Вероятность и статистика» углублённого уровня темы «Математическое ожидание случайной величины» и «Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины» в содержании обучения отнесены к 11 классу, а в тематическом планировании к 10 классу.

На каком содержании делать планирование в конструкторе?

Федеральная рабочая программа | Математика. 10-11 классы (углублённый уровень)

### ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

#### 10 класс

| Название раздела (темы)            | Количество часов | Основное содержание   | Основные виды деятельности обучающихся   |
|------------------------------------|------------------|---|--|
| Случайные величины и распределения | 14               | Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Операции над случайными величинами.<br><br>Математическое ожидание бинарной случайной величины.<br>Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений. Дисперсия и стандартное отклонение. Дисперсия бинарной случайной величины.<br>Свойства дисперсии.<br>Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин.<br>Дисперсия биномиального распределения. | Осваивать понятия: случайная величина, распределение, таблица распределения, диаграмма распределения.<br><br>Строить совместные распределения.<br>Изучать свойства математического ожидания.<br>Решать задачи с помощью изученных свойств.<br>По изученным формулам находить математические ожидания случайных величин, имеющих геометрическое и биномиальное распределения.<br>Осваивать понятия: дисперсия, стандартное отклонение случайной величины. |





Федеральное государственное бюджетное  
научное учреждение «Институт стратегии  
развития образования»

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПИСЬМО

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА»

В 2024/2025 УЧЕБНОМ ГОДУ



МАТЕМАТИКА

**ВЕРОЯТНОСТЬ  
И СТАТИСТИКА**

**10—11**

классы

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВНИ

• • • Методическое пособие  
для учителя



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ  
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

федеральное государственное  
бюджетное научное учреждение

**МАТЕМАТИКА**

**(углубленный уровень)**

Реализация требований ФГОС  
среднего общего образования

*Методическое пособие для учителя*

# Математика (углубленный уровень)

## Реализация требований ФГОС среднего общего образования

### Соответствие содержания программ учебного курса для 10 классов и учебных курсов для основной школы

| <i>Содержание курса 10 класса</i>  | <i>Соответствующие<br/>классы основной школы</i> |
|--|--|
| Граф, связный граф, пути в графе: циклы и цепи<br>Степень (валентность) вершины. Графы на плоскости  | 7  |
| Деревья  | 8  |
| Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы).<br>Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий | 7  |
| Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями  | 8  |
| Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Диаграммы Эйлера.<br>Формула сложения вероятностей                                | 8  |
| Условная вероятность. Умножение вероятностей.<br>Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события             | 8  |



## Математика (углубленный уровень)

### Реализация требований ФГОС среднего общего образования

| <i>Содержание курса 10 класса</i>  | <i>Соответствующие классы основной школы</i> |
|--|--|
| Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания.<br>Серия независимых испытаний до первого успеха.<br>Серия независимых испытаний Бернулли. Случайный выбор из конечной совокупности | 9  |
| Перестановки и факториал. Число сочетаний.<br>Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона  | 9  |
| Случайная величина. Распределение вероятностей.<br>Диаграмма распределения. Операции над случайными величинами. Бинарная случайная величина.<br>Примеры распределений, в том числе геометрическое и биномиальное | 9  |



## Вариант 1

► Компактное и акцентированное тематическое повторение конкретного материала в начале учебного года по классам

## Вариант 2

► Следовать тематическому планированию, рекомендованному федеральной рабочей программой, но при изучении «проблемной» темы «отступить на шаг назад» и начать изучение с материала, отнесенного к 7-9.

**Поурочное планирование курса «Вероятность и статистика» в 10 классе (2 часа в неделю, углубленный уровень)**

| №  | ТЕМА УРОКА  |
|--|---|
| <b>Введение в теорию графов</b>                  |   |
| 1  | Граф, вершина, ребро. Представление задачи с помощью графа.   |
| 2  | Степень (валентность) вершины. Число рёбер и суммарная степень вершин. Цепь и цикл. Путь в графе. Представление о связности графа. Представление об ориентированных графах. |
| 3  | Решение задач по теме «Графы»   |
| 4  | Дерево. Свойства дерева: единственность пути, существование висячей вершины, связь между числом вершин и числом ребер   |
| 5  | Решение задач по теме «Деревья»   |
| <b>Описательная статистика</b>                   |   |
| 6-7  | Описательная статистика: среднее арифметическое, свойства среднего арифметического, медиана, наибольшее и наименьшее значение, размах                                       |
| 8-9  | Рассеивание числовых данных и отклонения. Дисперсия числового набора. Стандартное отклонение числового набора. Диаграммы рассеивания  |
| <b>Случайная изменчивость</b>                    |   |
| 10-11  | Случайная изменчивость. Частота значений в массиве данных, группировка, гистограммы, связь между частотами значений и средним арифметическим                                |
| <b>Случайные опыты и случайные события</b>       |   |
| 12-14  | Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Монета и игральная кость в теории вероятностей.  |
| <b>Математическое описание случайных событий</b> |   |
| 15-17  | Вероятность случайного события. Вероятности событий в опытах с равновероятными элементарными событиями  |
| <b>Множества</b>                                 |   |
| 18   | Множество, подмножество, примеры подмножеств, операции над множествами, диаграмма Эйлера  |
| 19   | Операции над множествами, множества решений неравенств и систем   |
| 20   | Правило умножения   |

Гиматдинова Г.Н. КУРС «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ: ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕХОДА В 10 КЛАСС. Вестник ТОГИРРО. 2023. № 2 (51). С. 15–16.



- ▶ Полезно также использовать и **потенциал самостоятельной работы** обучающихся при условии, что им будет предоставлена возможность поработать с материалами учебника для основной школы, прежде всего, изучить/повторить теорию забытой или непройденной темы, разобрать примеры решения задач.
- ▶ **Интеграция** с курсом информатики и использование компьютера.
- ▶ Учитель может воспользоваться ресурсом **внеурочной деятельности**.





**Система оценки достижений  
планируемых предметных результатов  
освоения учебного предмета  
«Математика»**

*Методические рекомендации*

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |           |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 4         |
| Значение оценочной деятельности, ее функции .....  | 4         |
| Предметные результаты как объект проверки и оценивания .....   | 5         |
| Многообразие видов и форм оценивания .....   | 7         |
| Критериальное оценивание .....   | 9         |
| <b>1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО УЧЕБНОМУ<br/>ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА» И ОЦЕНКА ИХ ДОСТИЖЕНИЯ .....</b> | <b>11</b> |
| 1.1. Особенности предметных планируемых результатов по математике.....                                       | 11        |
| 1.2. Планируемые результаты обучения, распределенные по годам<br>обучения .....                              | 17        |
| 1.3. Планируемые тематические результаты обучения .....  | 19        |
| <b>2. ВИДЫ И ФОРМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ<br/>ПО МАТЕМАТИКЕ.....</b>                              | <b>23</b> |
| 2.1. Итоговый контроль .....   | 24        |
| 2.2. Тематический контроль .....   | 29        |
| 2.3. Текущее оценивание .....  | 33        |
| 2.4. Стартовая диагностика .....   | 38        |
| 2.5. Самооценивание .....  | 43        |
| <b>ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ.....</b>   | <b>46</b> |

# Смешанное обучение. Перевернутое обучение



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ»



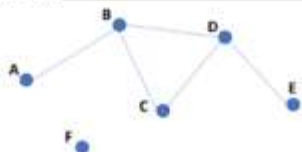
## Графы. Вершины и ребра

Отсканируйте QR-код, внимательно просмотрите видео, заполните пропуски в тексте, опираясь на видео.

Граф – это \_\_\_\_\_

Точки в графе называются \_\_\_\_\_

Некоторые (не обязательно все) \_\_\_\_\_ соединены линиями. Эти линии называются \_\_\_\_\_



Запишите обозначение данного графа:

Гиматдинова Г.Н. ГРАФЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА». Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы. Материалы 42-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Смоленск, 2023. С. 299–303.

СМЕШАННОЕ ОБУЧЕНИЕ В УСЛОВИЯХ  
ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ  
ОБРАЗОВАНИЯ (ДЛЯ УЧЕБНЫХ  
ПРЕДМЕТОВ «МАТЕМАТИКА»,  
«ИНФОРМАТИКА»)

Методические рекомендации

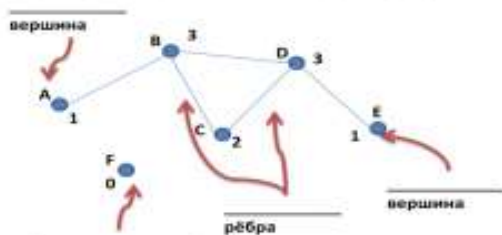


# Смешанное обучение. Перевернутое обучение

Графы считают \_\_\_\_\_, если в двух графах \_\_\_\_\_ связаны \_\_\_\_\_ в одном и том же порядке, один граф можно получить из другого, передвигая \_\_\_\_\_.

Степень вершины в графе – это \_\_\_\_\_.

Иногда степень вершины называют \_\_\_\_\_.



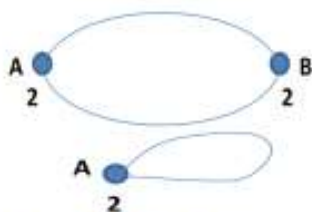
Вершина, которая не имеет связи, называется \_\_\_\_\_.

Если из вершины выходит только одно ребро, то \_\_\_\_\_ вершина называется \_\_\_\_\_.

Два ребра, выходящими из одной вершины, называются \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_ в графе – два или более ребра, которые соединяют они и те же две вершины.

\_\_\_\_\_ в графе – ребро, которое связывает вершину с ней же самой.



Отсканируйте QR-код и просмотрите примеры





**Лист индивидуальной работы по теме  
«Графы. Вершины и ребра графа. Степень вершины»**

Задание 1.

На рисунке 1 изображен граф. Укажите:

- вершины графа \_\_\_\_\_
- ребра графа \_\_\_\_\_
- изолированные вершины \_\_\_\_\_
- висячие вершины \_\_\_\_\_

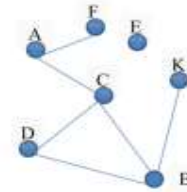


Рисунок 1

Задание 2.

По рисунку 1 определите степень каждой вершины.

- deg A =                      deg C =                      deg E =                      deg K =
- deg B =                      deg D =                      deg F =

Задание 3.

На рисунке 2 изображен граф. Придумайте и изобразите одинаковый ему граф.

|                  |  |
|------------------|--|
| <p>Рисунок 2</p> |  |
|------------------|--|

Задание 4.

Нарисуйте какой-нибудь граф, у которого 6 вершин, степени которых равны 1, 2, 2, 3, 3, 3.



Задание 5.

Самостоятельно придумайте граф из 5 вершин, в котором должна быть одна висячая и одна изолированная вершины. Подпишите вершины, укажите получившиеся ребра, определите степень каждой вершины.

|  |   |
|--|---|
|  | рёбра графа – _____<br>deg _ = _____;<br>deg _ = _____;<br>deg _ = _____;<br>deg _ = _____;<br>deg _ = _____; |
|--|---|

<https://obr.1c.ru/mathkit/>



## Обзор возможностей «Математического конструктора»



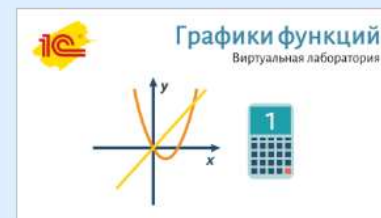
Планиметрия  
Виртуальная лаборатория

[Видео](#) • [Интерактивная презентация](#)



Стереометрия  
Виртуальная лаборатория

[Видео](#) • [Интерактивная презентация](#)



Графики функций  
Виртуальная лаборатория

[Видео](#) • [Интерактивная презентация](#)



Теория вероятностей  
Виртуальная лаборатория

[Видео](#) • [Интерактивная презентация](#)



Математическое  
моделирование  
Виртуальная лаборатория

[Видео](#) • [Интерактивная презентация](#)



Математический  
конструктор

[Общий обзор МК – Видеолекция](#)

## 1С:Виртуальная лаборатория

группа разработки  
творческих конструкторских сред

- Динамические модели и чертежи
- Задания с проверяемыми ответами
- Интерактивные тренажеры с подсказками
- Виртуальные эксперименты
- Обучающие игры и развлечения

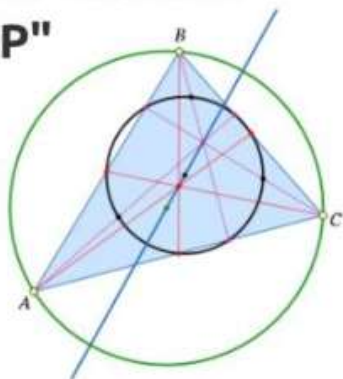
## Математический конструктор

лучшая российская программа  
динамической математики

- Арифметика
- Алгебра и начала анализа
- Функции и графики
- Планиметрия и стереометрия
- Вероятность и статистика

<https://uc1.1c.ru/course/organizatsiya-uchebnoj-deyatelnosti-na-urokakh-matematiki-na-osnove-sredy-1s-matematicheskij-konstruktor/>

## ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ СРЕДЫ "1С:МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР"



## ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ СРЕДЫ «1С:МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР»

Рейтинг: ★★★★★ (4.7)

♥ В ИЗБРАННОЕ | 📊 В СРАВНЕНИЕ

Запись видеокурса – июнь 2023 г.

Форма обучения: онлайн-обучение без отрыва от работы.

Режим занятий: 2 часа в день, 2 раза в неделю.





# Контроль освоения учебного материала

# ЕГЭ по математике профильного уровня



ФИПИ

Федеральная служба по надзору в сфере образования  
и науки  
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

**И.В. Яценко, И.Р. Высоцкий, П.И. Самсонов,  
А.В. Семенов**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**  
для учителей, подготовленные  
на основе анализа типичных ошибок  
участников ЕГЭ 2024 года  
по **МАТЕМАТИКЕ**

## Красноярский ЦОКО

Краевое государственное казенное специализированное учреждение "Центр оценки качества образования" г.Красноярск, ул. Высотная, д. 9, тел. (391) 246-00-26

**ГЛАВА 2.**  
**Методический анализ результатов ЕГЭ<sup>1</sup>**  
**по математике (профильный уровень)**

**ГЛАВА 2.**  
**Методический анализ результатов ЕГЭ<sup>1</sup>**  
**по математике (базовый уровень)**

## Раздел «Вероятность и статистика».

Задание 4 с кратким ответом базового уровня и задание 5 с кратким ответом повышенного уровня.

**Задание 4** – задача по теории вероятностей на прямое вычисление вероятности.

*Пример 1*

Фабрика выпускает сумки. В среднем 4 сумки из 50 имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без скрытого дефекта.

*Пример 2*

В группе туристов 20 человек. С помощью жребия они выбирают семь человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

**Задание 5** – задача по теории вероятностей повышенного уровня.

*Пример 1*

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

*Пример 2*

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

*Комментарий.* Задание 4 верно выполнили больше 90 %, задание 5 верно выполнили больше 70 % участников экзамена, что говорит о успешном овладении выпускниками умениями анализа простейших вероятностных моделей, готовности школы к реализации обновленного ФГОС, предусматривающего систематическое изучение вероятности и статистики в рамках специально выделенного часа в учебном плане с 7 по 11 класс.

Типичные ошибки при выполнении этих заданий связаны с неумением анализировать вероятностную модель и формальным заучиванием правил для вычислений по формулам.





ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫМ ПРАВАМ СОЗДАТЕЛЕЙ И ИЗОБРЕТЕНИЙ



# ЕГЭ на ВСЕ 100!

## Математика

ОНЛАЙН-КОНСУЛЬТАЦИЯ  
ПО ПОДГОТОВКЕ  
К ЕГЭ-2025



Анализ результатов (на основе типичных ошибок) позволяет выделить следующие проблемные темы в группах участников экзамена с разными уровнями подготовки (профильный уровень):

- в группе не набравших минимальный балл: планиметрия, векторы, стереометрия, начала теории вероятностей, простейшие уравнения, вычисления и преобразования, производная.
- в группе от минимального балла до 60: планиметрия, векторы, стереометрия, начала теории вероятностей, вероятности сложных событий, простейшие уравнения, вычисления и преобразования, производная, задачи с прикладным содержанием, текстовые задачи, графики функций, наибольшее и наименьшее значения функций.

### Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы и связь с успешностью выполнения заданий КИМ

*Работа с информацией*

Основная проблема в работе с информацией, проявившаяся в ЕГЭ по математике (профильный уровень), связана с пониманием текстов, написанных на русском языке (интерпретация информации различных видов и форм представления). В задании 5 вместо вероятности «в течение года хотя бы одна лампа из трёх не перегорит» многие участники экзамена посчитали вероятность «в течение года хотя бы одна лампа из двух не перегорит». В задании 8 считали, что изображен графики функции, а не производной функции. Тем не

Статистический анализ выполнения заданий КИМ в 2024 году показал, что при подготовке к первой части экзаменационной работы необходимо обратить внимание на развитие у обучающихся следующих умений:

*повышенный уровень*

- вычислять вероятность с использованием графических методов, применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, комбинаторные факты и формулы;

| Номер задания | Проверяемые требования к предметным результатам освоения основной образовательной программы  | Коды проверяемых требований (по кодификатору) | Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору) |
|---------------|--|---|---|
| 4             | Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность  | 8   | 6   |
| 5             | Умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, комбинаторные факты и формулы | 8   | 6   |



## *Проверяемые требования к предметным результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования на основе изменённого в 2022 г. ФГОС*

- умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события;
- умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы;
- оценивать вероятности реальных событий;
- умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений;
- умение использовать свойства изученных распределений для решения задач;
- знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований;
- умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;
- умение оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона;
- умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач; оценивать вероятности реальных событий;
- составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат

### *Проверяемый элемент содержания*

- Описательная статистика;
- Вероятность;
- Комбинаторика



# ВПР по математике

ВПР. Математика. 10 класс. Образец

Код

## Проверочная работа по МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС

Образец

### Пояснение к образцу проверочной работы

На выполнение работы по математике отводится два урока (не более 45 минут каждый). Работа состоит из двух частей и включает в себя 17 заданий.

Обе части работы могут выполняться в один день с перерывом не менее 10 минут или в разные дни.

При выполнении работы не разрешается пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяются и оцениваться не будут.

## *Кодификатор проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки обучающихся*

|          |  |
|----------|--|
| <b>6</b> | <b>Теория вероятностей и статистика</b>  |
| 6.1      | Представление данных с помощью таблиц и диаграмм. Среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия и стандартное отклонение числовых наборов   |
| 6.2      | Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий. Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями. Вероятности событий в опытах с равновозможными элементарными событиями |
| 6.3      | Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Диаграммы Эйлера. Формула сложения вероятностей   |
| 6.4      | Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Независимые события  |
| 6.5      | Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона  |
| 6.6      | Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли   |
| 6.7      | Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Примеры распределений, в том числе геометрическое и биномиальное  |

## *Перечень проверяемых предметных результатов освоения основной образовательной программы среднего общего образования*

| <b>Код проверяемого результата</b> | <b>Проверяемые предметные результаты освоения основной образовательной программы среднего общего образования</b>   | <b>Мета-предметный результат</b> |
|------------------------------------|--|----------------------------------|
| <b>6</b>                           | <b>Теория вероятностей и статистика</b>  |                                  |
| 6.1                                | Читать и строить таблицы и диаграммы   | МП 1.1; 1.2; 1.3                 |
| 6.2                                | Оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее значение, наименьшее значение, размах массива числовых данных   | МП 1.1; 1.3                      |
| 6.3                                | Оперировать понятиями: случайный эксперимент (опыт) и случайное событие, элементарное событие (элементарный исход) случайного опыта; находить вероятности в опытах с равновероятными случайными событиями; находить и сравнивать вероятности событий в изученных случайных экспериментах | МП 1.1; 1.2; 1.3; 3.1            |
| 6.4                                | Находить и формулировать события: пересечение и объединение данных событий, событие, противоположное данному событию; пользоваться диаграммами Эйлера и формулой сложения вероятностей при решении задач   | МП 1.1; 1.3                      |
| 6.5                                | Оперировать понятиями: условная вероятность, независимые события; находить вероятности с помощью правила умножения, дерева случайного опыта  | МП 1.1; 1.2; 1.3                 |
| 6.6                                | Применять комбинаторное правило умножения при решении задач  | МП 1.1                           |
| 6.7                                | Оперировать понятиями: испытание, независимые испытания, серия испытаний, успех и неудача; находить вероятности событий в серии независимых испытаний до первого успеха; находить вероятности событий в серии испытаний Бернулли   | МП 1.1; 1.2; 1.3; 3.1            |
| 6.8                                | Оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, диаграмма распределения   | МП 1.1; 1.3                      |



*Распределение заданий проверочной работы по позициям кодификатора*

| № | Проверяемые предметные результаты  | Код<br>КТ/КЭС | Уро-<br>вень<br>слож-<br>ност<br>и<br>зада-<br>ния | Макси-<br>мальны<br>й балл за<br>выпол-<br>нение<br>задания |
|---|--|---------------|--|---|
| 6 | Оперировать понятиями: случайный эксперимент (опыт) и случайное событие, элементарное событие (элементарный исход) случайного опыта; находить вероятности в опытах с равновозможными случайными событиями; находить и сравнивать вероятности событий в изученных случайных экспериментах | 6.3/6         | Б  | 1   |
| 9 | Оперировать понятиями: условная вероятность, независимые события; находить вероятности с помощью правила умножения, дерева случайного опыта  | 6.5/6         | Б  | 1   |



## *Распределение заданий проверочной работы по позициям кодификатора*

| №  | Проверяемые предметные результаты   | Код<br>КТ/КЭС | Уро-<br>вень<br>слож-<br>ност<br>и<br>зада-<br>ния | Макси-<br>мальны<br>й балл за<br>выпол-<br>нение<br>задания |
|----|---|---------------|--|---|
| 17 | <p>Оперировать понятиями: случайный эксперимент (опыт) и случайное событие, элементарное событие (элементарный исход) случайного опыта; находить вероятности в опытах с равновозможными случайными событиями, находить и сравнивать вероятности событий в изученных случайных экспериментах.</p> <p>Находить и формулировать события: пересечение и объединение данных событий, событие, противоположное данному событию; пользоваться диаграммами Эйлера и формулой сложения вероятностей при решении задач.</p> <p>Оперировать понятиями: условная вероятность, независимые события; находить вероятности с помощью правила умножения, дерева случайного опыта.</p> <p>Применять комбинаторное правило умножения при решении задач.</p> <p>Оперировать понятиями: испытание, независимые испытания, серия испытаний, успех и неудача; находить вероятности событий в серии независимых испытаний до первого успеха; находить вероятности событий в серии испытаний Бернулли</p> | 6.3–6.7/6     | II   | 2   |

Задания 6, 9 и 17 проверяют умение находить вероятности случайных событий в опытах, зная вероятности элементарных событий, в том числе в опытах с равновозможными элементарными событиями, а также вероятности с помощью дерева случайного опыта.

6 Из коробки, в которой лежат 15 чёрных и 5 красных маркеров, достают один случайный маркер. Найдите вероятность того, что он окажется красным.

9 Симметричный игральный кубик бросили два раза. Известно, что при первом броске выпало больше очков, чем при втором. Какова вероятность того, что в сумме выпало семь очков?

17 Баскетболист два раза бросает мяч в кольцо. При первом броске вероятность попадания равна 0,4. Если баскетболист промахнулся при первом броске, то при втором броске вероятность попадания не меняется, а если попал в кольцо, то при втором броске вероятность попадания равна 0,7. Какова вероятность того, что баскетболист попадёт мячом в кольцо ровно один раз?

**ИЛИ**

17 В серии из 11 испытаний Бернулли вероятность успеха в каждом отдельном испытании равна 0,2. Во сколько раз вероятность события  $A$  «наступит ровно 4 успеха» меньше вероятности события  $B$  «наступит ровно 3 успеха»?

6

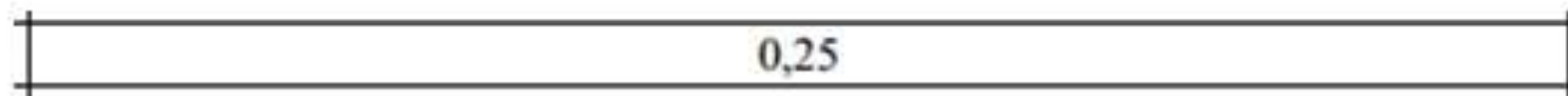
Из коробки, в которой лежат 15 чёрных и 5 красных маркеров, достают один случайный маркер. Найдите вероятность того, что он окажется красным.

- 6 Из коробки, в которой лежат 15 чёрных и 5 красных маркеров, достают один случайный маркер. Найдите вероятность того, что он окажется красным.

15 чёрных + 5 красных = 20 маркеров

A - достают красный маркер

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$$





9

Симметричный игральный кубик бросили два раза. Известно, что при первом броске выпало больше очков, чем при втором. Какова вероятность того, что в сумме выпало семь очков?

9

Симметричный игральный кубик бросили два раза. Известно, что при первом броске выпало больше очков, чем при втором. Какова вероятность того, что в сумме выпало семь очков?

Первый бросок

Второй бросок

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |

9

Симметричный игральный кубик бросили два раза. Известно, что при первом броске выпало больше очков, чем при втором. Какова вероятность того, что в сумме выпало семь очков?

Первый бросок

Второй бросок

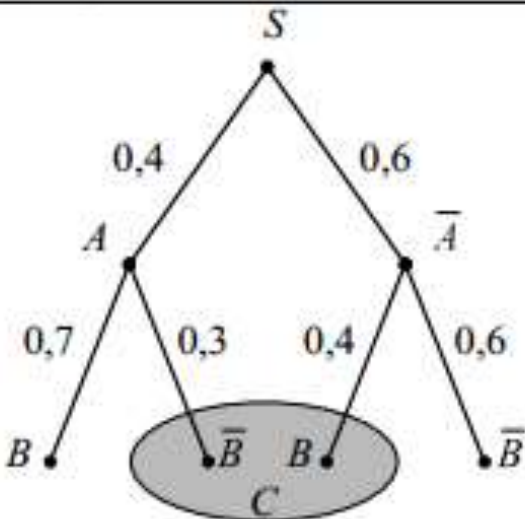
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$$

0,2

17

Баскетболист два раза бросает мяч в кольцо. При первом броске вероятность попадания равна 0,4. Если баскетболист промахнулся при первом броске, то при втором броске вероятность попадания не меняется, а если попал в кольцо, то при втором броске вероятность попадания равна 0,7. Какова вероятность того, что баскетболист попадёт мячом в кольцо ровно один раз?

| Решение и указания к оцениванию   | Баллы   |
|---|---|
| <p>Решение.</p> <p>Обозначим <math>A</math> и <math>B</math> события «попадание при первом броске» и «попадание при втором броске» соответственно и построим дерево этого случайного опыта.</p> <p>Событию <math>C</math> «ровно одно попадание» благоприятствуют цепи <math>SAB\bar{B}</math> и <math>S\bar{A}B</math>.</p> $P(C) = P(SA\bar{B}) + P(S\bar{A}B) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,36.$ <p>Ответ: 0,36.</p> <p><b>Возможно другое решение</b></p> |  |
| Обоснованно получен верный ответ  | 2   |
| Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки   | 1   |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0   |
| <i>Максимальный балл</i>  | 2   |



17

В серии из 11 испытаний Бернулли вероятность успеха в каждом отдельном испытании равна 0,2. Во сколько раз вероятность события  $A$  «наступит ровно 4 успеха» меньше вероятности события  $B$  «наступит ровно 3 успеха»?

| Решение и указания к оцениванию   | Баллы |
|---|-------|
| <p>Решение.<br/>           Пусть <math>q = 1 - p = 0,8</math> — вероятность неудачи в одном испытании.</p> $\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_{11}^3 p^3 q^8}{C_{11}^4 p^4 q^7} = \frac{11! \cdot 4! \cdot 7! \cdot q}{11! \cdot 3! \cdot 8! \cdot p} = \frac{4 \cdot 0,8}{8 \cdot 0,2} = 2.$ <p>Ответ: в 2 раза.</p> <p><b>Возможно другое решение</b></p> |       |
| Обоснованно получен верный ответ  | 2     |
| Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки   | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше   | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>  | 2     |



**Практикум по решению  
задач из курса  
«Вероятность и статистика»**

## *Испытания Бернулли*

### Серия (схема) Бернулли

Серией (схемой) Бернулли называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых должны быть выполнены следующие условия:

- Каждое испытание имеет ровно два исхода, условно называемых успехом и неудачей.
- Независимость испытаний: результат очередного эксперимента не должен зависеть от результатов предыдущих экспериментов.
- Вероятность успеха должна быть постоянной (фиксированной) для всех испытаний.

## Вероятность определенного числа успехов в серии испытаний Бернулли

**Пример 1.** Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность, что он попадёт в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется.

### Решение 1.

Вероятность промаха в мишень равна  $1 - 0,8 = 0,2$ . Тогда вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется, равна  $0,8 * 0,2 * 0,2 * 0,2 = 0,0064$



**Пример 2.** Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно три мишени?

**Решение 2.**

1 способ (перебор вариантов):

|     |     |     |     |        |        |
|-----|-----|-----|-----|--------|--------|
| 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,2 | 0,1024 | 0,4096 |
| 0,8 | 0,8 | 0,2 | 0,8 | 0,1024 |        |
| 0,8 | 0,2 | 0,8 | 0,8 | 0,1024 |        |
| 0,2 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,1024 |        |

## Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

причем  $p + q = 1$  и применяется только для двух исходов с вероятностями  $p$  и  $q$ .

### Пример 3.

Стрелок стреляет по 8 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок поразит ровно три мишени?

**Решение 2.**

2 способ (применение формулы Бернулли):

Вероятность промаха в мишень равна  $1-0,8=0,2$ , т.е.  $p = 0,8$ ,  $q = 0,2$ .

$$P_4(3) = C_4^3 0,8^3 0,2^1 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0,512 \cdot 0,2 = 0,4096$$

**Решение 3.**

$$P_8(3) = C_8^3 0,8^3 0,2^5 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot 0,512 \cdot 0,00032 = 56 \cdot 0,512 \cdot 0,00032 = 56 \cdot \frac{2^{14}}{10^8}$$



**Пример 3.** В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Событие  $A$  – достали белый шар, тогда вероятности  $P(A) = \frac{2}{3}$ ,  $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ .

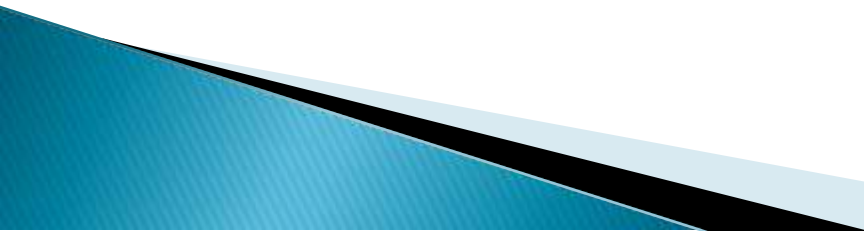
$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

### **Задание 1.**

Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

### **Задание 2.**

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно 5 мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно 4 мишени»?



### Задание 1.

Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

### Решение.

Вероятность выпадения орла при одном броске монеты равна  $\frac{1}{2}$ , вероятность решки тоже  $\frac{1}{2}$ .

Посчитаем вероятность того, что из 10 бросков монеты выпадет ровно 5 орлов.

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5! \cdot 2^{10}}$$

Вероятность выпадения ровно 4 орлов равна

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10!}{4! \cdot 6! \cdot 2^{10}}$$

Найдем, во сколько раз  $P_{10}(5)$  больше, чем  $P_{10}(4)$

$$\frac{P_{10}(5)}{P_{10}(4)} = \frac{10!}{5! \cdot 5! \cdot 2^{10}} : \frac{10!}{4! \cdot 6! \cdot 2^{10}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

### Задание 2.

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно 5 мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно 4 мишени»?

### Решение.

Стрелок поражает мишень с первого или со второго выстрела. Вероятность поразить мишень равна  $0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,84$ .

Вероятность поразить 5 мишеней из 5 равна  $P_1 = 0,84^5$ .

Вероятность поразить 4 мишени из 5 находим по формуле Бернулли:

$$P_2 = C_5^4 (0,84)^4 (0,16)^1 = \frac{5! \cdot 0,84^4 \cdot 0,16}{4!} = 5 \cdot 0,84^4 \cdot 0,16$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{0,84^5}{5 \cdot 0,84^4 \cdot 0,16} = \frac{0,84}{0,8} = 1,05$$

Ответ: 1,05.



Примеры  
задач

Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найдите вероятность того, что будет сделано **5 бросков**.

Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найдите вероятность того, что будет сделано **не более 3 бросков**.

Из урны, в которой лежат 7 черных и 3 белых шара достают один шар. Если вытащенный шар черный, то его кладут обратно. Испытание повторяется до тех пор, пока не будет вытащен белый шар. Найдите вероятность того, что будет сделано **не менее 4 попыток**.

|               |  |   |  |               |   |   |               |               |               |               |               |  |   |
|---------------|--|---|--|---------------|---|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--|---|
| Примеры задач | Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найдите вероятность того, что будет сделано <b>5 бросков</b> .   | Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найдите вероятность того, что будет сделано <b>не более 3 бросков</b> . | Из урны, в которой лежат 7 черных и 3 белых шара достают один шар. Если вытащенный шар черный, то его кладут обратно. Испытание повторяется до тех пор, пока не будет вытащен белый шар. Найдите вероятность того, что будет сделано <b>не менее 4 попыток</b> . |               |   |   |               |               |               |               |               |  |   |
| Условия       | $A$ – выпала шестерка,<br>$\bar{A}$ – не выпала шестерка<br>$p = P(A) = \frac{1}{6}$<br>$q = P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$   | $A$ – выпала шестерка,<br>$\bar{A}$ – не выпала шестерка<br>$p = P(A) = \frac{1}{6}$<br>$q = P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$                | $A$ – достали белый шар,<br>$\bar{A}$ – достали черный шар<br>$P(A) = 0,3$<br>$P(\bar{A}) = 0,7$   |               |   |   |               |               |               |               |               |  |   |
| 1 способ      | <table border="1" data-bbox="434 853 768 1006"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td><math>\frac{5}{6}</math></td><td><math>\frac{5}{6}</math></td><td><math>\frac{5}{6}</math></td><td><math>\frac{5}{6}</math></td><td><math>\frac{1}{6}</math></td></tr> </table> $P(5) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{7776}$ | 1   | 2  | 3             | 4 | 5 | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} =$ $= \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} =$ $= \frac{36 + 30 + 25}{216}$ $P(k \leq 3) = \frac{91}{216}$ | $1 - (0,3 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,7^2 \cdot 0,3)$ $P(K \geq 4) = 0,343$ |
| 1             | 2  | 3   | 4  | 5             |   |   |               |               |               |               |               |  |   |
| $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$  | $\frac{5}{6}$   | $\frac{5}{6}$  | $\frac{1}{6}$ |   |   |               |               |               |               |               |  |   |
| Формула       | $P(k) = q^{k-1} \cdot p$   | $P(k \leq n) = 1 - q^n$   | $P(k \geq n) = q^{n-1}$  |               |   |   |               |               |               |               |               |  |   |
| 2 способ      | $P(5) = p \cdot q^4 = \frac{625}{7776}$  | $P(k \leq 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$   | $P(K \geq 4) = (0,7)^3 = 0,343$  |               |   |   |               |               |               |               |               |  |   |

**Пример 5.** Монета бросается до первого выпадения герба.

а) Какова вероятность, что будет сделано не более трёх испытаний?

б) Какова вероятность, что будет сделано не менее трёх испытаний?

в) Какова вероятность, что будет сделано от пяти до семи испытаний (включительно)?

Вероятность выпадения герба  $\frac{1}{2}$

$$\text{а) } p(k \leq 3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$\text{б) } p(k \geq 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\text{в) 1 способ: } p(5 \leq k \leq 7) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} = \frac{7}{128}$$

$$\text{2 способ: } p(5 \leq k \leq 7) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^7} = \frac{8-1}{128} = \frac{7}{128} = 0,0546875$$

Для нахождения вероятности успеха в заданном промежутке применяется формула:

$$p(a \leq k \leq b) = q^{a-1} - q^b$$

Приведем пример вывода формулы для последнего случая, в котором необходимо найти вероятность события для заданного промежутка количества испытаний.

$$\begin{aligned} p(a \leq k \leq b) &= p(k \leq b) - p(k \leq (a-1)) = 1 - q^b - (1 - q^{a-1}) = \\ &= 1 - q^b - 1 + q^{a-1} = q^{a-1} - q^b \end{aligned}$$

Для нахождения вероятности успеха в заданном промежутке применяется формула:

$$p(a \leq k \leq b) = q^{a-1} - q^b$$



Система ПВО должна поражать летящую цель с вероятностью не менее 0,95. Система с интервалом в несколько секунд выпускает по цели несколько ракет. Известно, что каждая отдельная ракета поражает цель с вероятностью 0,6.

а) Достаточно ли трех ракет, чтобы цель была поражена с вероятностью не менее 0,95?

б) Достаточно ли четырех ракет?

### Решение 6.

Требуется, чтобы в серии из трех или четырех испытаний Бернулли с вероятностью успеха  $p = 0,6$  успех случился хотя бы раз. Будем искать вероятность противоположного события — события «цель не поражена ни разу».

Если ракет три, то эта вероятность равна  $P(\bar{A}) = 0,4^3 = 0,064$ . Тогда вероятность поражения цели равна  $1 - 0,064 = 0,936$  - недостаточно.

Если ракет четыре, то  $P(\bar{A}) = 0,4^4 = 0,0256$ . Вероятность поражения равна  $1 - 0,0256 = 0,9744$ .

Ответ: а) нет; б) да.

## Случайный выбор из конечной совокупности

### Пример 8.

Из 15 билетов лотереи 4 выигрышных. Какова вероятность того, что среди взятых наугад шести билетов будет 2 выигрышных? (*результат округлите до тысячных*)

### Решение 8.

15 билетов = 4 выигрыш + 11 не выигрыш – всего билетов

6 билетов = 2 выигрыш + 4 не выигрыш – взяли наугад

$A$  – среди взятых наугад 6 билетов будет 2 выигрышных

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m = C_4^2 \cdot C_{11}^4, n = C_{15}^6$$

$$m = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 1980, n = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = 5005,$$

$$P(A) = \frac{1980}{5005} \approx 0,396.$$

### Пример 9.

В ящике 10 болтов, среди них 3 стальных болта, остальные — медные. Из ящика не глядя достают 6 болтов. Найдите вероятность того, что среди выбранных болтов окажется:

- а) менее двух стальных;
- б) от трёх до пяти медных.

### Решение 9.

а) Найдем вероятность того, что среди выбранных болтов окажется менее двух стальных, то есть 0 стальных и 1 стальных.

$$\begin{aligned} P(0) + P(1) &= \frac{C_3^0 \cdot C_7^6 + C_3^1 \cdot C_7^5}{C_{10}^6} = \\ &= \frac{\frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \frac{7!}{6! \cdot 1!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!}}{\frac{10!}{6! \cdot 4!}} = \frac{7 + 3 \cdot 21}{210} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

б) Найдем вероятность того, что среди выбранных болтов окажется от трёх до пяти медных, то есть 3 медных, 4 медных и 5 медных.

$$\begin{aligned} P(3) + P(4) + P(5) &= \frac{C_3^3 \cdot C_7^3 + C_3^2 \cdot C_7^4 + C_3^1 \cdot C_7^5}{C_{10}^6} = \\ &= \frac{35 + 3 \cdot 35 + 3 \cdot 21}{210} = \frac{203}{210} = \frac{29}{30} \end{aligned}$$

Подписывайтесь на Rutube канал «Цифра и знания»



Материалы по теме «Преподавание курса «Вероятность и статистика»  
в старшей школе в условиях обновления содержания образования»

